ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO ĐÌNH THOẢNG

PHƯƠNG PHÁP LẶP XOAY VÒNG VÀ ĐỒNG THỜI GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH NHIỀU TẬP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Nguyễn Bường

Thái Nguyên – 2020

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường (Viện Công nghệ Thông tin-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán, nhà trường và các phòng chức năng của trường, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn anh chị em trong lớp cao học và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

$\langle ., . \rangle$	tích vô hướng trên không gian Hilbert H
$\|.\|$	chuẩn trên không gian Hilbert H
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0

Mở đầu

Cho C và Q là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert H_1 và H_2, tương ứng. Cho $A: \ H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Bài toán chấp nhận tách (SFP) có dạng như sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in C \text{ sao cho } Ax^* \in Q. \tag{0.1}$$

Dạng tổng quát của Bài toán (0.1) là bài toán (0.2), bài toán này được phát biểu như sau: Cho C_i, $i = 1, 2, ..., N$ và Q_j, $j = 1, 2, ..., M$ là các tập con lồi và đóng của H_1 và H_2 tương ứng.

$$\text{Tìm một phần tử} \quad x^* \in S = \cap_{i=1}^{N} C_i \cap A^{-1}(\cap_{j=1}^{M} Q_j) \neq \emptyset. \tag{0.2}$$

Mô hình bài toán (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Y. Censor và T. Elfving [6] cho mô hình các bài toán ngược. Bài toán này đóng vai trò quan trọng trong khôi phục hình ảnh trong Y học, điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị bệnh ung thư, khôi phục tín hiệu (xem [4], [5]) hay có thể áp dụng cho việc giải các bài toán cân bằng trong kinh tế, lý thuyết trò chơi.

Thời gian gần đây, lớp các Bài toán (0.2) đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Mục đích của luận văn này là trình bày chứng minh chi tiết cho các phương pháp lặp xoay vòng và phương pháp lặp đồng thời để xấp xỉ một nghiệm của Bài toán (0.2) từ tài liệu [7].

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert, phép chiếu mêtric, ánh xạ không giãn và một số phương pháp cải tiến của phương pháp CQ giải Bài toán (0.2).

Chương 2. Phương pháp lặp xoay vòng và lặp liên tiếp giải bài toán (MSSFP)

Chương này luận văn trình bày chứng minh chi tiết cho các kết quả của Wen và các cộng sự về hai phương pháp lặp xoay vòng và lặp liên tiếp cho việc giải Bài toán (MSSFP) (xem phát biểu trang 15) trong tài liệu [7]. Ngoài ra, luận văn cũng trình bày dạng nới lỏng của các phương pháp khi các tập lồi, đóng C_i và Q_j là các tập mức dưới của các hàm lồi.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm ba mục chính. Mục 1.1 đề cập đến một số đặc trưng cơ bản của không gian Hilbert thực, Mục 1.2 giới thiệu sơ lược một số kết quả về ánh xạ không giãn, bao gồm khải niệm, tính chất của tập điểm bất động và nguyên lý nửa đóng. Mục 1.3 trình bày về phương pháp CQ và một số cải tiến của phương pháp này để giải bài toán chấp nhận tách đa tập. Nội dung của chương này phần lớn được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [8] và [9].

1.1. Một số đặc trưng của không gian Hilbert

Ta luôn giả thiết H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được kí hiệu là $\|.\|$.

Mệnh đề 1.1. *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau*

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle,$$

với mọi $x, y, z \in H$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, x-z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \\
&= [\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle] \\
&\quad + [\langle x,x\rangle - 2\langle x,z\rangle + \langle z,z\rangle] \\
&= \|x-y\|^2 + \|x-z\|^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.2. *Với mọi* $\{x_1, \ldots, x_n\} \in H$, *ta có bất đẳng thức sau.*

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||x_i||^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j ||x_i - x_i||^2, \ n \geq 2, \tag{1.1}$$

trong đó $\lambda_i \in [0,1], i = 1, 2 \ldots, n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i||^2 &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - \|x_i - x_j\|^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x_i\|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \|x_i - x_j\|^2.
\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Hệ quả 1.1. *Cho* H *là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi* $x, y \in H$ *và mọi* $\lambda \in [0,1]$, *ta có*

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\|^2 = \lambda \|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.1. Cho C là một tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert H. Dãy $\{x_n\} \subset H$ được gọi là đơn điệu Fejér tương ứng đối với C nếu với mọi $z \in C$, ta đều có

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\|, \ \forall n \geq 1.$$

Nhận xét 1.1. Nếu $\{x_n\} \subset H$ là đơn điệu Fejér tương ứng đối với C, thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ với mọi $z \in C$.

Mệnh đề 1.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực. Khi đó, nếu với $x, y \in H$ thỏa mãn điều kiện*

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|,$$

tức là bất đẳng thức Schwars xảy ra dấu bằng thì hai véc tơ x và y là phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $x \neq \lambda y$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, từ tính chất của tích vô hướng, ta có

$$0 < \|x - \lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2,$$

với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng nếu $y = 0$, thì hiển nhiên x và y là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử $y \neq 0$, khi đó với $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, thì bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\|.\|y\|,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x và y là phụ thuộc tuyến tính.
Mệnh đề được chứng minh. □

Nhắc lại rằng, dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

với mọi $y \in H$. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$, được cho bởi

$$e_n = (0, ..., 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, ..., 0, ...),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta biết rằng mọi không gian Hilbert H đều thỏa mãn điều kiện của Opial, tính chất này được thể hiện trong mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực và $\{x_n\} \subset H$ là một dãy bất kỳ thỏa mãn điều kiện $x_n \rightharpoonup x$, khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi $y \in H$ và $y \neq x$, ta có*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1.3}$$

Chứng minh. Vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta có

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.$$

Vì $x \neq y$, nên

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 &> \liminf_{n\to\infty}(\|x_n - x\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 1.5. ([2]) *Cho K là một tập lồi, đóng khác rỗng của không gian Hilbert H. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong H thảo mãn các điều kiện sau.*

a) $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||$ *tồn tại với mỗi $x \in K$.*

b) $\omega_w(x_n) \in K$, *trong đó $\omega_w(x_n)$ là tập các điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới một điểm thuộc K.*